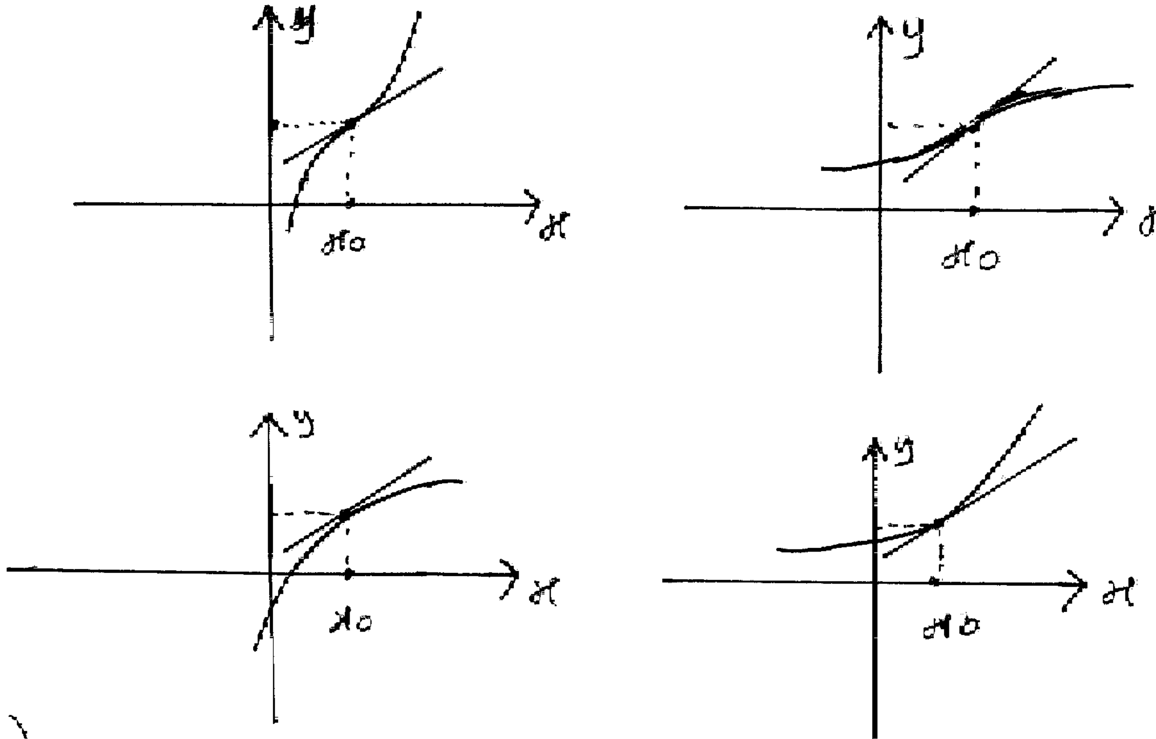
QUESITO 1

$$f(x_0)>0,\quad f'(x_0)>0,\quad f''(x_0)=0$$

a) le condizioni date ci garantiscono soltanto che la funzione è crescente in un intorno di x_0; si possono presentare le seguenti situazioni:



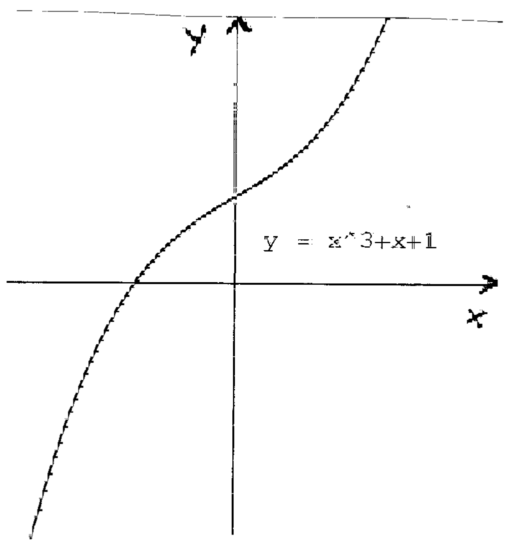
b)

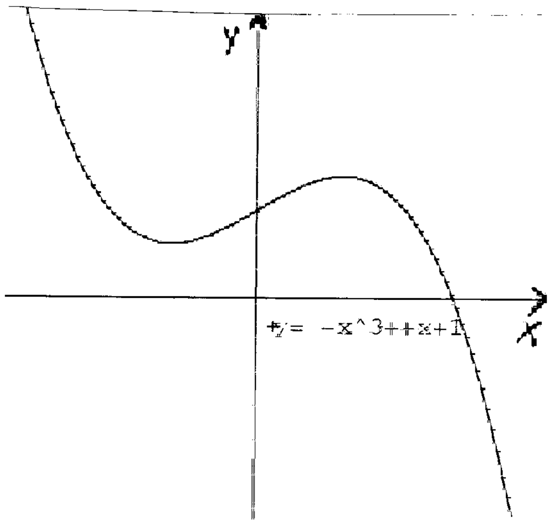
$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+$$
$$+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+o(x-x_0)^2$$

cioè $f(x)$ può essere del tipo

$$f(x)=1+1\cdot x+ax^3+bx^4$$

con $a=1 \Rightarrow f(x)=1+x+x^3$ $(b=0)$
con $a=-1 \Rightarrow f(x)=1+x-x^3$





Partendo da $y = 1 + x + a x^4$

$y' = 1 + 4 a x^3$; $y'' = 12 a x^2$

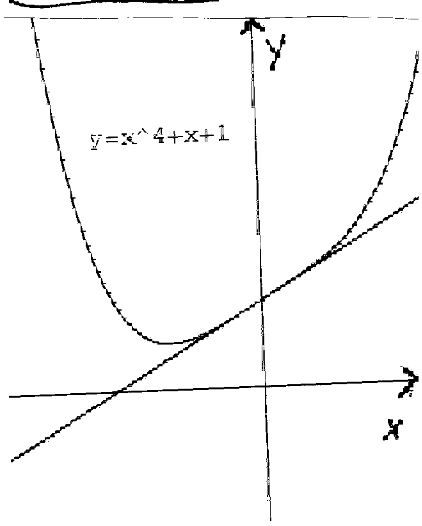
$(y''' = 36 a x)$ con $a > 0$

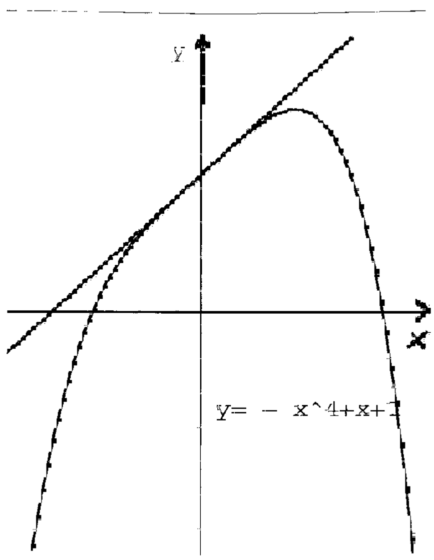
$y'' > 0 \quad \forall x \neq 0$

con $a < 0$ $\quad y'' < 0 \quad \forall x \neq 0$

$\boxed{a = 1} \Rightarrow y = x^4 + x + 1$

$\boxed{a = -1} \Rightarrow y = -x^4 + x + 1$





c) • $y = x^3 + x + 1$

$y' = 3x^2 + 1 = 1$

solo in $x = 0$

• $y = -x^3 + x + 1$

$y' = -3x^2 + 1 = 1$

solo in $x = 0$

• $y = x^4 + x + 1$

$y' = 4x^3 + 1 = 1$

solo in $x = 0$

• $y = -x^4 + x + 1$

$y' = -4x^3 + 1 = 1$

solo in $x = 0$

d) $D(x^n) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$

$= \dots = n \cdot x^{n-1}$

(tale limite è calcolato in tutti i testi di Analisi).

Seconda soluzione (per ricorrenza)

$n = 1$

- $D(x) = 1$ (come si dimostra facilmente calcolando

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} \Bigg)$$

- Hp: $D(x^n) = n \cdot x^{n-1}$
- Th: $D(x^{n+1}) = (n+1)x^n$

$$D(x^{n+1}) = D(x \cdot x^n) = 1 \cdot x^n + x(n \cdot x^{n-1}) =$$

$$= x^n + n \cdot x^n = (n+1) \cdot x^n$$
