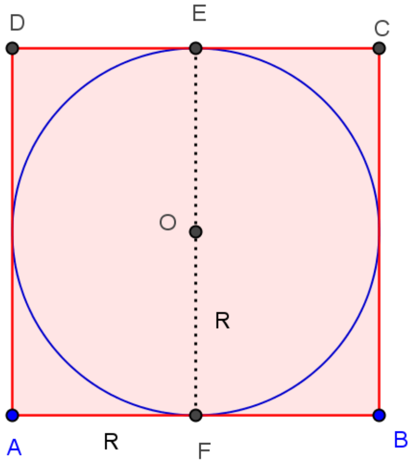
PNI 2001

QUESITO 1

Provare che una sfera è equivalente ai 2/3 del cilindro circoscritto.



$$V(sfera) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V(scilindro) = \pi R^2 h = \pi R^2 (2R) = 2\pi R^3$$

$$\frac{V(sfera)}{V(scilindro)} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi R^3} = \frac{2}{3}$$

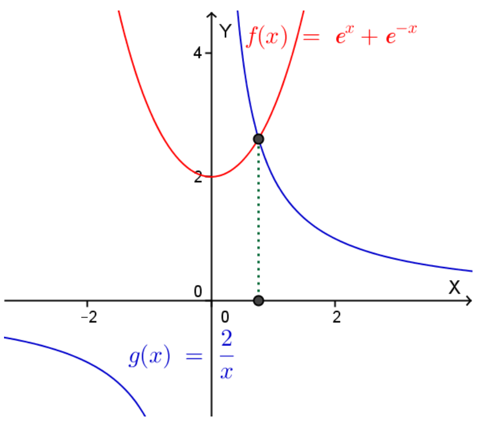
QUESITO 2

Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione:

$$xe^x + xe^{-x} - 2 = 0$$

Riscriviamo l'equazione nella forma: $e^x + e^{-x} = \frac{2}{x}$ (x=0 non è soluzione).
Confrontiamo graficamente le due funzioni:

$y = e^x + e^{-x}$ e $y = \frac{2}{x}$ (la prima è il doppio del coseno iperbolico)



Abbiamo quindi una soluzione.

QUESITO 3

Dimostrare che se p(x) è un polinomio, allora tra due qualsiasi radici distinte di p(x) c'è una radice di p'(x).

Siano x_1 ed x_2 due radici distinte di p(x): $p(x_1)= p(x_2)=0$.

Applichiamo il **Teorema di Rolle** alla funzione y=p(x) nell'intervallo $[x_1;x_2]$. Le funzioni polinomiali sono continue e derivabili dappertutto, inoltre p(x) assume agli estremi lo stesso valore, quindi esiste almeno un punto c nell'intervallo $(x_1;x_2)$ in cui la derivata p'(x) si annulla. La tesi è così dimostrata.

QUESITO 4

Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = arcsen\,x + \arccos x$$

Quali conclusioni se ne possono trarre per la f(x)?

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Si deduce che f(x) è costante, per un **corollario del Teorema di Lagrange.**

N.B.

Cerchiamo il valore della costante.

Poniamo *arcsen(x)=a e arccos(x)=b; risulta: x=sen(a)=cos(b)=*$sen\left(\frac{\pi}{2}-b\right)$.

Quindi: $a = \frac{\pi}{2} - b \quad \Longrightarrow \quad a + b = f(x) = \frac{\pi}{2}$

QUESITO 5

Calcolare l'integrale

$$\int \frac{\log x}{x} dx$$

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \int (\log x\,) \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{log^2 x}{2} + K$$

QUESITO 6

Con uno dei metodi di quadratura studiati, si calcoli un'approssimazione dell'integrale definito

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx$$

e si confronti il risultato ottenuto con il valore esatto dell'integrale.

Il valore esatto dell'integrale è:

$$I = \int_0^{\pi} sen\ x\ dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2$$

Notiamo che : $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\ x\ dx = 2I_1$ e calcoliamo $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\ x\ dx$ mediante il metodo dei rettangoli, ponendo n=3. Notiamo che nell'intervallo in esame la funzione sen x è crescente.

L'intervallo $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ha come punti di divisione: $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$; $inoltre\ h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi/2}{3} = \frac{\pi}{6}$

Ponendo f(x)= sen x risulta:

$$hf(0) + hf\left(\frac{\pi}{6}\right) + hf\left(\frac{\pi}{3}\right) < I_1 < hf\left(\frac{\pi}{6}\right) + hf\left(\frac{\pi}{3}\right) + hf\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{\pi}{6}\left(0 + sen\frac{\pi}{6} + sen\frac{\pi}{3}\right) < I_1 < \frac{\pi}{6}\left(sen\frac{\pi}{6} + sen\frac{\pi}{3} + 1\right)$$

$$\frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) < I_1 < \frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$$

$$0.72 < I_1 < 1.24$$

Quindi:

$$\mathbf{1.44 < \boldsymbol{I} < 2.48}$$

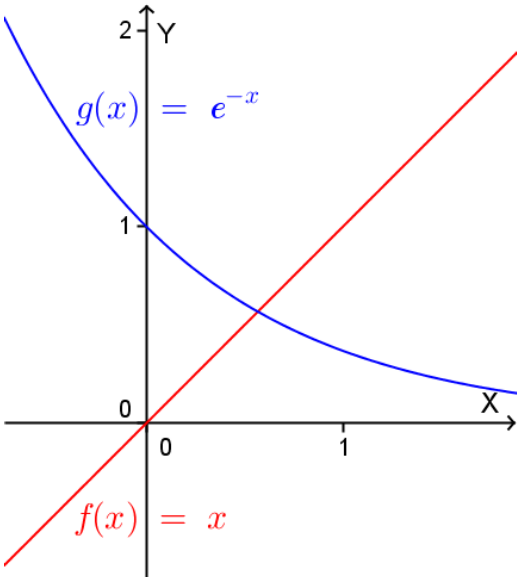
Possiamo scegliere per I la seguente approssimazione:

$I = \frac{1.44+2.48}{2}$=1.96 (che differisce dal valore esatto 2 di 0.04)

QUESITO 7

Verificato che l'equazione $\boldsymbol{x - e^{-x} = 0}$ *ammette una sola radice positiva compresa tra 0 e 1 se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.*

Confrontiamo graficamente le funzioni di equazione $y = x$ e $y = e^{-x}$



Osservando il grafico si conclude che l'equazione ammette una sola soluzione nell'intervallo [0; 1]. Notiamo che g(0)=1>f(0)=0 e che g(1)=1/e<f(1)=1

Poniamo ora $f(x) = x - e^{-x}$ e applichiamo ilo metodo di bisezione nell'intervallo [0; 1].

$$f(0) = -1 \quad f(1) = 1 - \frac{1}{e} < 0$$

Quindi, detta c la soluzione: $0 < c < 1$

$$f\left(\frac{0+1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \cong -0.7 \ \Rightarrow 0.5 < c < 1$$

$$f\left(\frac{0.5+1}{2}\right) = f(0.75) \cong 0.28 \ \Rightarrow 0.5 < c < 075$$

QUESITO 8

Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i sedici allievi se ne scelgono 3 a caso: qual è la probabilità che essi siano tutti maschi?

I casi possibili (terne possibili con 16 allievi) sono le combinazioni di 16 oggetti a 3 a 3: $\binom{16}{3}$.

I casi favorevoli (le terne possibili con 12 maschi) sono $\binom{12}{3}$.

La probabilità richiesta è quindi: $p = \frac{\binom{12}{3}}{\binom{16}{3}} = \frac{11}{28}$

QUESITO 9

*Spiegare il significato di **sistema assiomatico** con particolare riferimento alla sistemazione logica della geometria.*

L'argomento è trattato su qualsiasi libro di testo per il PNI.

Approfondimento su Wikipedia.

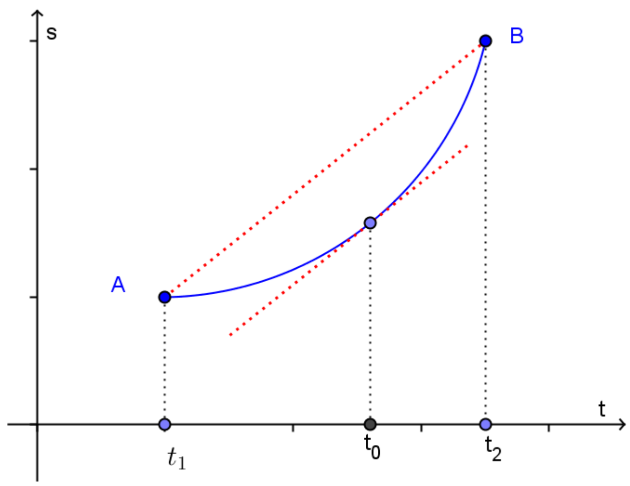
QUESITO 10

Dire, formalizzando la questione e utilizzando il ***teorema del valor medio o di Lagrange****, se è vero che: «se un automobilista compie un viaggio senza soste in cui la velocità media è 60 km/h, allora almeno una volta durante il viaggio il tachimetro dell'automobile deve indicare esattamente 60 km/h».*

Sia s=s(t) la legge oraria del moto.
La velocità media nell'intervallo di tempo t_2-t_1 è data da:

$$v_m = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = coeff.ang.della\ retta\ AB$$

dove $A = (t_1; s(t_1))$ e $B = (t_2; s(t_2))$.



Per il teorema di Lagrange esiste almeno un istante t_0 tale che

$$s'(t_0) = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1} = v_m = 60$$

Ma $s'(t_0)$ è la velocità nell'istante t_0, quindi esiste almeno un istante in cui la velocità dell'automobile è esattamente 60 km/h.