

A. S. 2000/2001

Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Tema di: MATEMATICA

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario.

PROBLEMA 1

Sia AB un segmento di lunghezza $2a$ e C il suo punto medio.

Fissato un conveniente sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y) :

- si verifichi che il luogo dei punti P tali che $\frac{PA}{PB} = k$ (k costante positiva assegnata) è una circonferenza (circonferenza di Apollonio) e si trovi il valore di k per cui la soluzione degenera in una retta;
- si determini il luogo geometrico γ dei punti X che vedono AC sotto un angolo di 45° ;
- posto X , appartenente a γ , in uno dei due semipiani di origine la retta per A e per B e indicato con α l'angolo \widehat{XAC} si illustri l'andamento della funzione $y = f(x)$ con $f(x) = (XB / XA)^2$ e $x = tg\alpha$.

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y) , è assegnata la funzione:

$$y = x^2 + a \log(x + b)$$

con a e b diversi da zero.

- si trovino i valori di a e b tali che la curva Γ grafico della funzione passi per l'origine degli assi e presenti un minimo assoluto in $x=1$;
- si studi e si disegni Γ ;
- si determini, applicando uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione della intersezione positiva di Γ con l'asse x ;
- si determini l'equazione della curva Γ' simmetrica di Γ rispetto alla retta $y = y(1)$;
- si disegni, per i valori di a e b trovati, il grafico di:

$$y = |x^2 + a \log(x + b)|$$

Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

PIANO NAZIONALE DI INFORMATICA

CORSO SPERIMENTALE

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Provare che una sfera è equivalente ai $\frac{2}{3}$ del cilindro circoscritto.

2. Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione:

$$xe^x + xe^{-x} - 2 = 0$$

3. Dimostrare che se $p(x)$ è un polinomio, allora tra due qualsiasi radici distinte di $p(x)$ c'è una radice di $p'(x)$.

4. Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \arcsen x + \arccos x$$

Quali conclusioni se ne possono trarre per la $f(x)$?

5. Calcolare l'integrale

$$\int \frac{\log x}{x} dx$$

6. Con uno dei metodi di quadratura studiati, si calcoli un'approssimazione dell'integrale definito

$$\int_0^{\pi} \text{sen } x dx$$

e si confronti il risultato ottenuto con il valore esatto dell'integrale.

7. Verificato che l'equazione $x - e^{-x} = 0$ ammette una sola radice positiva compresa tra 0 e 1 se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

8. Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i sedici allievi se ne scelgono 3 a caso: qual è la probabilità che essi siano tutti maschi?

9. Spiegare il significato di *sistema assiomatico* con particolare riferimento alla sistemazione logica della geometria.

10. Dire, formalizzando la questione e utilizzando il teorema *del valor medio* o di *Lagrange*, se è vero che: «se un automobilista compie un viaggio senza soste in cui la *velocità media* è 60 km/h, allora almeno una volta durante il viaggio il tachimetro dell'automobile deve indicare esattamente 60 km/h».

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile e la consultazione del vocabolario di italiano.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.