PNI 2003

QUESITO 1

Ogni squadra gioca (18-1)x2 partite = 34 partite; ogni partita è giocata da due squadre, quindi il totale delle partite è: $\frac{34 \cdot 18}{2}$ = 306.

QUESITO 2

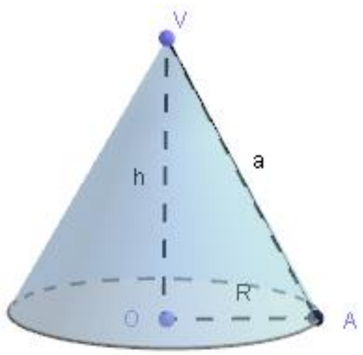
La probabilità che una lampadina scelta a caso da una delle tre scatole scelta a caso è data da:

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{20}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{100} = \frac{35}{300} \cong 0.1167 \cong 11.7\%$$

QUESITO 3

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = max$ se lo è $R^2 h = R^2 (h^2)^{\frac{1}{2}}$

Ed essendo $R^2 + h^2 = costante = 4$, $R^2 (h^2)^{\frac{1}{2}}$ risulta massimo quando le basi sono proporzionali agli esponenti:



$$\frac{R^2}{1} = \frac{h^2}{\frac{1}{2}}$$

Da cui: $R^2 = 2h^2 \Longrightarrow h^2 = \frac{4}{3}$

Quindi: $h = \sqrt{\frac{4}{3}}$ ed $R^2 = \frac{8}{3}$

Il volume massimo è pertanto:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{8}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} =$$

$$= \frac{16}{27}\pi\sqrt{3}\ dm^3 = \frac{16}{27}\pi\sqrt{3}\ litri =$$

= $\frac{16}{27}\pi\sqrt{3} \cdot 100\ cl \cong 322.5\ cl$

N.B.

1) Ponendo h=x risulta: $R^2 = 4 - x^2$ quindi:

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(4 - x^2)x$ il cui massimo richiesto (per esempio con lo studio della derivata prima) si ha per $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

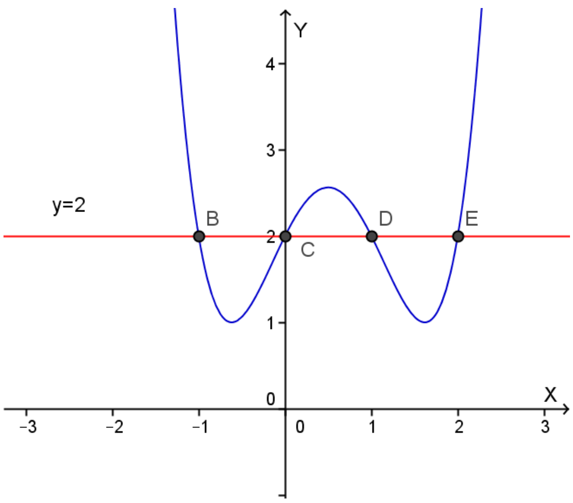
2) Il metodo da noi usato sfrutta la proprietà seguente:

se x+y=costante $x^a y^b = max$ se $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

QUESITO 4

Consideriamo il polinomio $A(x) = x(x^2 - 1)(x - 2)$. Il suo grafico taglia l'asse delle x nei quattro punti di ascissa: 0, +1, -1, 2.

Il grafico del polinomio $P(x) = x(x^2 - 1)(x - 2) + 2$ incontra la retta di equazione y=2 quattro volte.



QUESITO 5

Poniamo:

$$\boldsymbol{f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$$

Si tratta di una funzione razionale intera, quindi è sempre continua e derivabile. Se a e b sono due radici reali e distinte dell'equazione $\boldsymbol{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0}$, essendo f(a)=f(b)=0, nell'intervallo [a; b] è soddisfatto il teorema di Rolle, quindi esiste almeno un punto c tra a e b in cui f'(c)=0.
Ma
$\boldsymbol{f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1}$

Quindi esiste tra a e b almeno una radice dell'equazione

$\boldsymbol{nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 = 0}$, come richiesto.

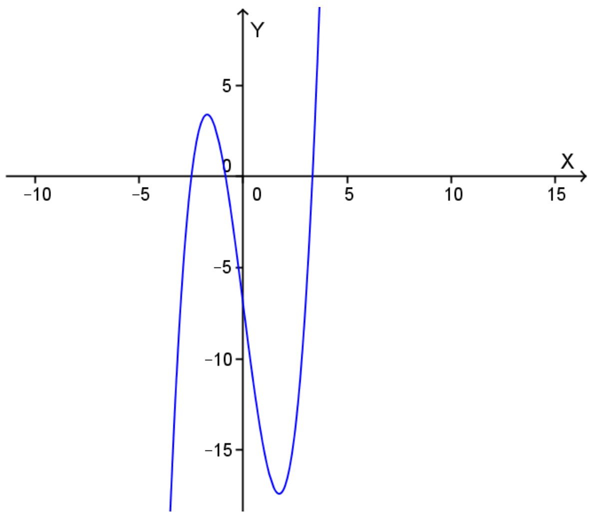
QUESITO 6

$\boldsymbol{x^3 + bx - 7 = 0}$

Dobbiamo trovare un possibile valore di b in modo che la suddetta equazione abbia tre radici reali.

Poniamo $\boldsymbol{f(x) = x^3 + bx - 7}$**.** Tale funzione ammette due zeri se la sua derivata prima ammette due zeri reali e distinti.
$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 + b}$ ha due zeri reali e distinti se b<0. Inoltre le ordinate del massimo e del minimo devono avere segno opposto. Un possibile valore è **b= - 9**.

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 - 9x - 7}$$



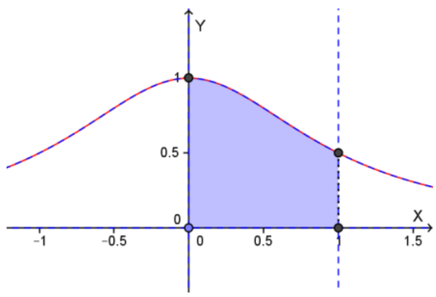
QUESITO 7

Dobbiamo verificare l'uguaglianza: $\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$$4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = 4[arctg\, x]_0^1 = 4\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = 4$$

Poniamo $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
Applichiamo il metodo dei rettangoli all'intervallo [0;1] con n=5 si ottiene per l'integrale il valore:

$$\frac{1}{5}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{5}\right) + \cdots + f\left(\frac{4}{5}\right)\right) \cong 0.834$$



Quindi un valore approssimato di π è dato da:

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \cong 4\cdot 0.834 \cong 3.336$$

QUESITO 8

Dobbiamo dare un esempio di solido il cui volume è dato da

$$\int_0^1 \pi x^3 dx$$

Ricordiamo che il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x dell'arco di curva y=f(x) in [a; b] è dato da:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

$\int_0^1 \pi x^3 dx = \pi \int_0^1 x^3 dx = \pi \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2 dx$ rappresenta il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x dell'arco della curva di equazione $y = \sqrt{x^3}$ in [0; 1].

QUESITO 9

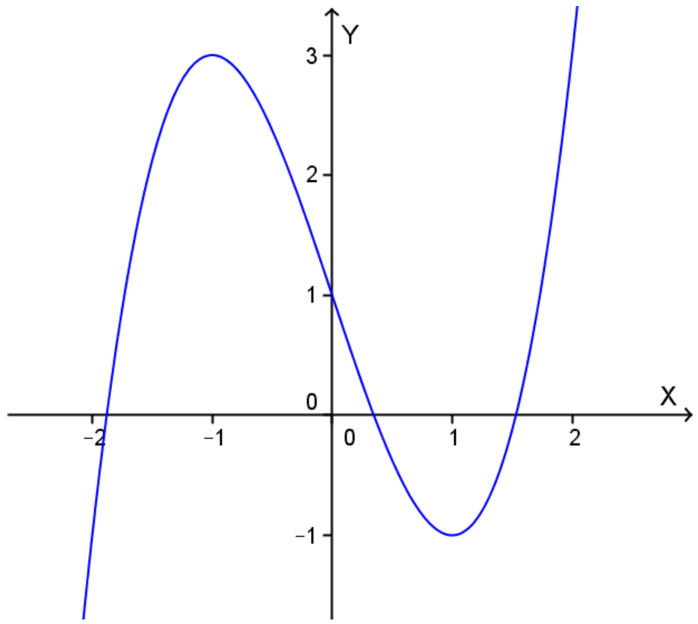
Di una funzione f(x) si sa che $f''(x) = sen\, x$ e che $f'(0) = 1$.
Dobbiamo calcolare $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)$
Risulta:
$f'(x) = \int sen\, x\, dx = -\cos x + k$
Siccome f'(0)=1, -1+k=1, da cui k=2.
$f(x) = \int (-\cos x + 2)\, dx = -\text{sen}\ x + 2x + c$
$f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = -1 + \pi + c - (c) = \pi - 1$

QUESITO 10

Verificare che l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ ammette tre radici reali. Di quella compresa tra 0 ed 1 si chiede di calcolare un valore approssimato applicando un metodo numerico.

Studiamo sommariamente la funzione di equazione: $f(x) = x^3 - 3x + 1$
I limiti a + infinito e – infinito sono rispettivamente + infinito e – infinito.
Per x=0 abbiamo y=1.
$f'(x) = 3x^2 - 3$, da cui si evince che si ha un max per x=-1, di ordinata 3, ed un min per x=1 di ordinata -1.

Si ha quindi il seguente grafico qualitativo:



Da tale grafico si deduce che l'equazione data ha tre radici reali, di cui una tra 0 ed 1.

Calcoliamo un valore approssimato della radice c compresa tra 0 ed 1 utilizzando il **metodo di bisezione**.
f(0)=1>0; f(1)= -1<0

0<c<1; $c_1 = 0.5$; f(0.5)= - 0.375<0; quindi 0<c<0.5
$c_2 = 0.25$; f(0.25)= 0.266>0; quindi 0.25<c<0.5
$c_3 = 0.375$; f(0.3755)= - 0.072<0; quindi 0.25<c<0.375
$c_4 = 0.3125$; f(0.3125)= 0.093>0; quindi 0.31<c<0.38

(un valore meglio approssimato è c= 0.347296)