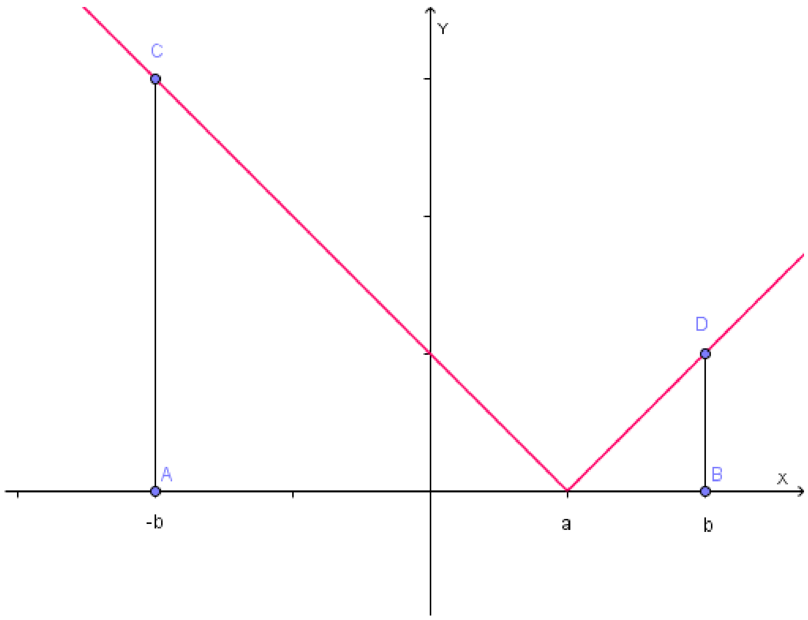
PNI 2009

QUESITO 1

$$\int_{-b}^{b}|x-a|\,dx=\int_{-b}^{a}|x-a|\,dx=\int_{-b}^{a}(a-x)dx+\int_{a}^{b}(x-a)dx=\left[-\frac{(a-x)^2}{2}\right]_{-b}^{a}+\left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]_{a}^{b}=$$

$$=\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{(b-a)^2}{2}=\frac{2a^2+2b^2}{2}=a^2+b^2$$

Il quesito può essere risolto anche graficamente, rappresentando la funzione di equazione **y=|x-a|** nell’intervallo [-b; b] e calcolando l’area delimitata dal grafico della funzione, dall’asse x e dalle rette di equazione x = - b e x = b.



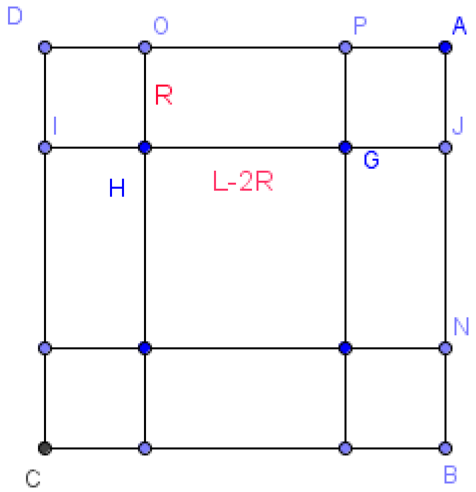
QUESITO 2

Ci sono applicazioni **suriettive**, ad esempio quella che manda 1 in a, 2 in b, 3 in c, 4 in c.
NON ci sono applicazioni **iniettive**, poiché ad elementi distinti di A devono corrispondere elementi distinti di B e ciò è impossibile perché A possiede 4 elementi e B solo 3.
NON ci sono applicazioni **biiettive** poiché non ce ne sono iniettive.

QUESITO 3

Il centro della moneta deve cadere all'interno di una mattonella ad una distanza da ogni suo lato superiore al raggio R della moneta; il centro deve cioè cadere in un quadrato di lato uguale al lato **L** di una mattonella meno il diametro **2R** della moneta. L'area **favorevole** è quindi $(L-2R)^2$. L'area **possibile** è quella di una mattonella: L^2.

La probabilità richiesta è quindi: $\frac{(L-2R)^2}{L^2} = \frac{(10-2.575)^2}{100} \cong 0.551 = 55.1\%$



QUESITO 4

I poliedri regolari (**solidi platonici**) sono **5**, e tra essi **non ce ne sono a facce esagonali**.

Poiché in ogni vertice di un poliedro devono convergere almeno tre facce (non complanari), la somma dei loro angoli deve essere inferiore ad un angolo giro.

Le facce possono essere solo triangoli equilateri (**tetraedro, ottaedro, icosaedro**), quadrati (**esaedro o cubo**), pentagoni regolari (**dodecaedro**).

Con tre facce esagonali avremmo come somma almeno 120°x3=360°, quindi non esiste un poliedro regolare a facce esagonali.

QUESITO 5

$\frac{0}{1} = x$? **Esiste** x, perché $x \cdot 1 = 0 \quad con \quad x = 0$.

$\frac{0}{0} = x$? **Non** si può attribuire ad x **un** valore numerico, perché $x \cdot 0 = 0 \quad \forall x$.

$\frac{1}{0} = x$? **Non** esiste x perché $x \cdot 0 = 1 \quad MAI$.

$0^0 = x$? **Non** esiste x perché la potenza in R a^x è definita solo con a>0 oppure con a=0 e x>0 (se 0^0 avesse significato, dovendo valere le proprietà delle potenze sarebbe $0^0 = 0^{1-1} = 0^1 \cdot 0^{-1} = \frac{0^1}{0^1} = \frac{0}{0}$, quindi avrebbe significato anche $\frac{0}{0}$.

QUESITO 6

Si tratta di applicare la formula iterativa $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - tg(x_n)$, con f(x)=sen x.

Posto n=0 e $x_0 = 3$ si ottiene $x_1 = 3 - tg(3) = 3.14254$;

$x_2 = x_1 - tg(x_1) = 3.14254 - tg(3.14254) = 3.14159$

Il valore che si ottiene è un'approssimazione di π.

QUESITO 7

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!(n-k)}$$

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$$

QUESITO 8

Sia **U** il numero degli uomini e **D** il numero delle donne.

$$26 = \frac{x_1 + x_2 + \Lambda + x_U}{U} \qquad 19 = \frac{y_1 + y_2 + \Lambda + y_D}{D}$$

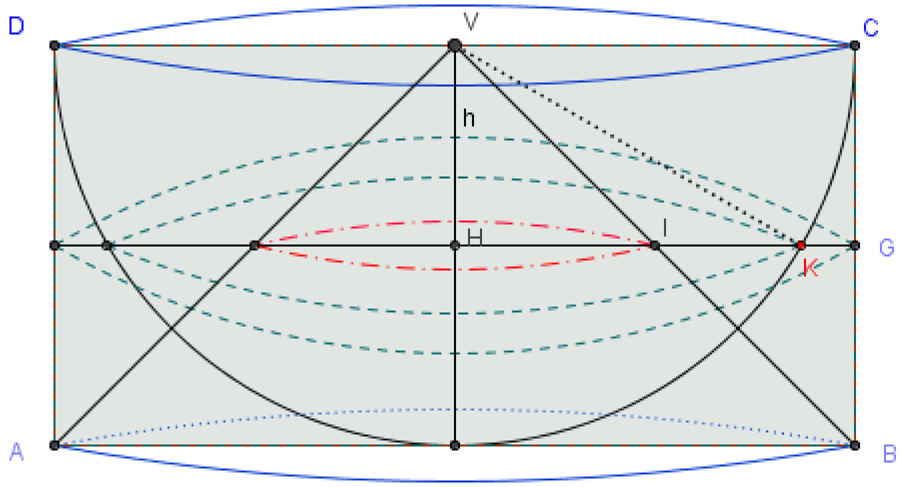
$$22 = \frac{(x_1 + x_2 + \Lambda + x_U) + (y_1 + y_2 + \Lambda + y_D)}{U+D} = \frac{26U + 19D}{U+D} \Rightarrow 22(U+D) = 26U + 19D$$

Quindi:

$$3D = 4U \Rightarrow \frac{U}{D} = \frac{3}{4}$$

Il rapporto richiesto è quindi **3/4.**

QUESITO 9



Indichiamo con R il raggio della sfera.
Tagliamo la scodella ed il cono con un piano che dista h da V.
La sezione della scodella è una corona circolare che ha raggio esterno uguale a R e raggio interno uguale a $\sqrt{R^2-h^2}$; la sua area vale quindi:
$\pi(R^2-(R^2-h^2))=\pi h^2$.
La sezione del cono è un cerchio di raggio h (il raggio della sezione con il cono è sempre uguale alla distanza h da V: detto infatti O il centro della base del cono, il triangolo AOB è rettangolo isoscele): l'area di tale cerchio è πh^2, come l'area della corono circolare.
Per il *Principio di Cavalieri* la scodella ha quindi volume pari a quello del cono

QUESITO 10

Si tratta del **Quinto postulato di Euclide** (detto anche **Postulato delle parallele**).
Per circa due mila anni i matematici hanno cercato di dimostrare questa proprietà a partire dagli altri postulati degli **Elementi** di Euclide.
All'inizio del XIX secolo i matematici incominciano a convincersi dell'impossibilità di dimostrare il Quinto postulato e fioriscono i tentativi di costruire altre geometrie che facciano a meno di tale postulato.
Negando la validità di tale postulato, negando cioè che per un punto P esterno ad una retta r passi una sola parallela alla retta data, si costruirono le cosiddette **Geometrie non euclidee**, nelle quali per il punto P può non passare alcuna parallela ad r (geometria **ellittica**) oppure ne possono passare più di una (geometria **iperbolica**).

Con la collaborazione di Simona Scoleri e Angela Santamaria