PNI 2011 - PROBLEMA 1

1

$$f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}$$

Il limite al + infinito è + infinito, quello al – infinito è – infinito.

$$f(x) + f(-x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} - x + \ln 4 + \frac{2}{e^{-x} + 1} = 2 + 2\ln 4 \quad (*)$$

Le equazioni della simmetria rispetto al punto $A(0;1+\ln 4)$ sono:

$\begin{cases} x' = -x \\ y' = 2 + 2\ln 4 - y \end{cases}$ che posso scrivere nella forma $\begin{cases} x \to -x \\ y \to 2 + 2\ln 4 - y \end{cases}$

La simmetrica di y=f(x) è $2 + 2\ln 4 - y = f(-x)$ ed sostituendo ad y f(x) otteniamo

$f(x) + f(-x) = 2 + 2 + \ln 4$: per la (*) possiamo dire che Γ è simmetrico rispetto ad A.

2)

f(x)=m equivale a **f(x)-m=0**. Pongo g(x)=f(x)-m; questa funzione, in base a quanto detto sui limiti della f, ha limite – infinito per x che tende a – infinito e + infinito per x che tende a + infinito, pertanto ammette almeno uno zero. Risulta poi:

$$g'(x) = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$$

che è positiva per ogni valore di x: quindi g(x) è sempre crescente e perciò, per ogni valore di m, si annulla solo una volta.

Posto $f(\alpha) = 3$ dobbiamo trovare m in modo che risulti $f(-\alpha) = m$.

Ricordiamo che $f(\alpha) + f(-\alpha) = 2 + 2\ln 4$ quindi

$$f(-\alpha) = 2 + 2\ln 4 - f(\alpha) = 2\ln 4 - 1 = m$$

3)

Verifichiamo che $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$**, cioè che:**

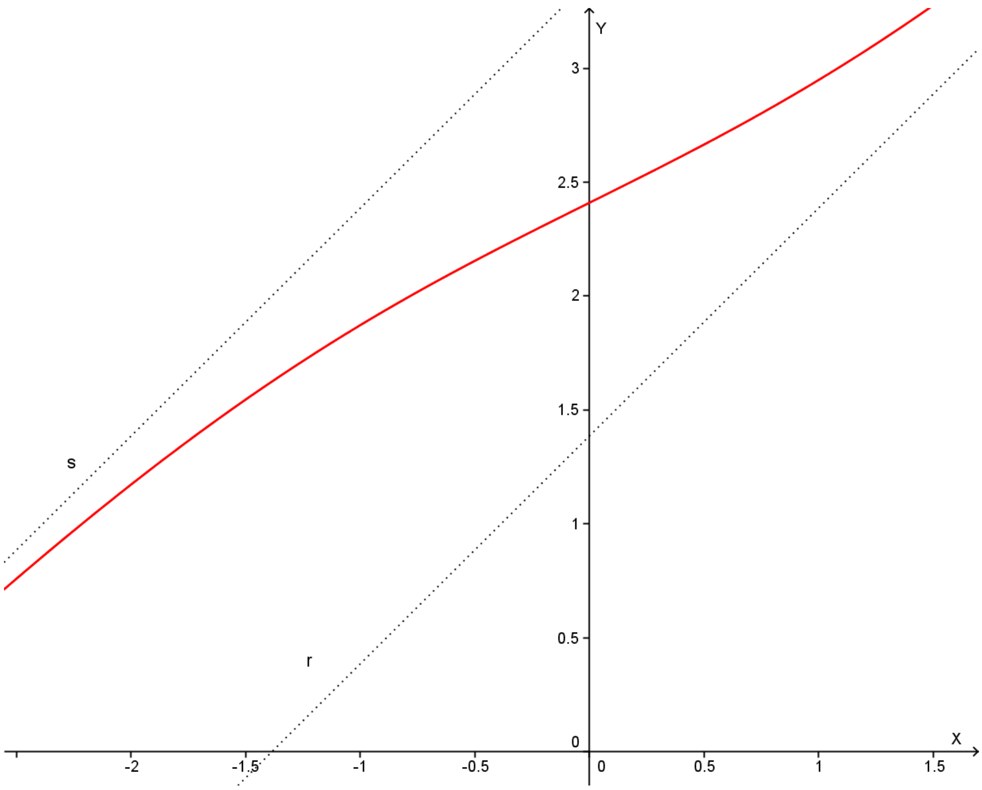
$x + \ln 4 + \dfrac{2}{e^x + 1} = x + 2 + \ln 4 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$, che equivale a $\dfrac{2}{e^x + 1} = 2 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$: si verifica immediatamente che il secondo membro, riducendo ad una frazione unica, coincide con il primo membro.

Verificchiamo che la retta r di equazione $y = x + \ln 4$ **è asintoto**. Per far ciò è sufficiente notare che per x che tende a + infinito f(x) tende a + infinito, f(x)/x tende a 1 e che f(x)-x tende a ln4: quindi r è asintoto obliquo per x che tende a + infinito.
In modo analogo si verifica che la retta s di equazione $y = x + 2 + \ln 4$ **è asintoto obliquo** per x che tende a – infinito.

Risulta poi, per ogni x, $f(x) > x + \ln 4$, poiché $\dfrac{2}{e^x + 1}$ è sempre maggiore di zero.

Inoltre $f(x) < x + 2 + \ln 4$, poiché $\dfrac{2e^x}{e^x + 1}$ è sempre maggiore di zero ed è
$f(x) = x + 2 + \ln 4 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$.

Pertanto la curva Γ **è compresa tra le rette r ed s.**



4)

$$I(\beta)=\int_0^{\beta}\left(f(x)-x-\ln 4\right)dx=\int_0^{\beta}\left(2-\frac{2e^x}{e^x+1}\right)dx=\left[2x-2\ln(e^x+1)\right]_0^{\beta}=2\beta-2\ln(e^{\beta}+1)+2\ln 2$$

Calcoliamo il limite per β che tende a + infinito del suddetto integrale:

$$2\beta-2\ln(e^{\beta}+1)+2\ln 2=\ln(e^{2\beta})-\ln(e^{\beta}+1)^2+2\ln 2=\ln\left(\frac{e^{2\beta}}{(e^{\beta}+1)^2}\right)+2\ln 2$$

E questa espressione tende a **2ln2 = ln4** per β che tende a + infinito (… l'argomento del logaritmo tende a 1, quindi il logaritmo tende a zero).

Significato geometrico: il limite trovato rappresenta l'area della regione compresa tra Γ ed r per x>0.