PNI 2011 - PROBLEMA 2

1)

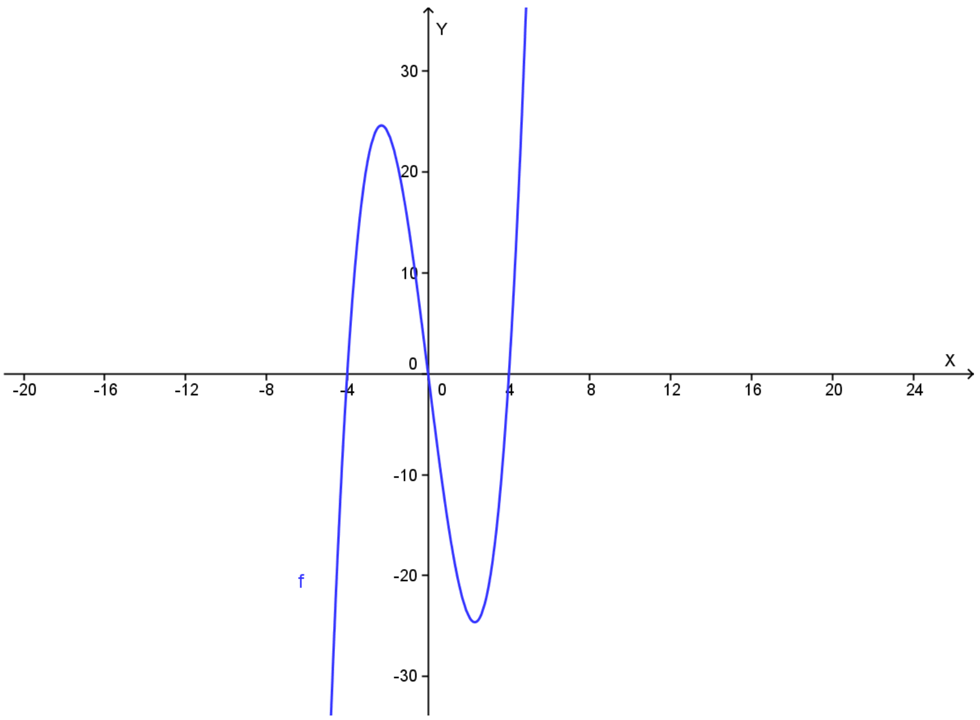
$f(x) = x^3 - 16x \qquad g(x) = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

La prima funzione è una cubica simmetrica rispetto all'origine, definita su tutto R, con limiti +infinito e -infinito rispettivamente a +infinito e –infinito. Le intersezioni con l'asse x sono in x=0,-4,4.
Risulta poi:

$f'(x) = 3x^2 - 16$: dallo studio della derivata prima si trovano il massimo ed il minimo relativi che sono rispettivamente $M = \left(-\frac{4}{\sqrt{3}}; \frac{128\sqrt{3}}{9}\right)$ ed $m = \left(\frac{4}{\sqrt{3}}; -\frac{128\sqrt{3}}{9}\right)$

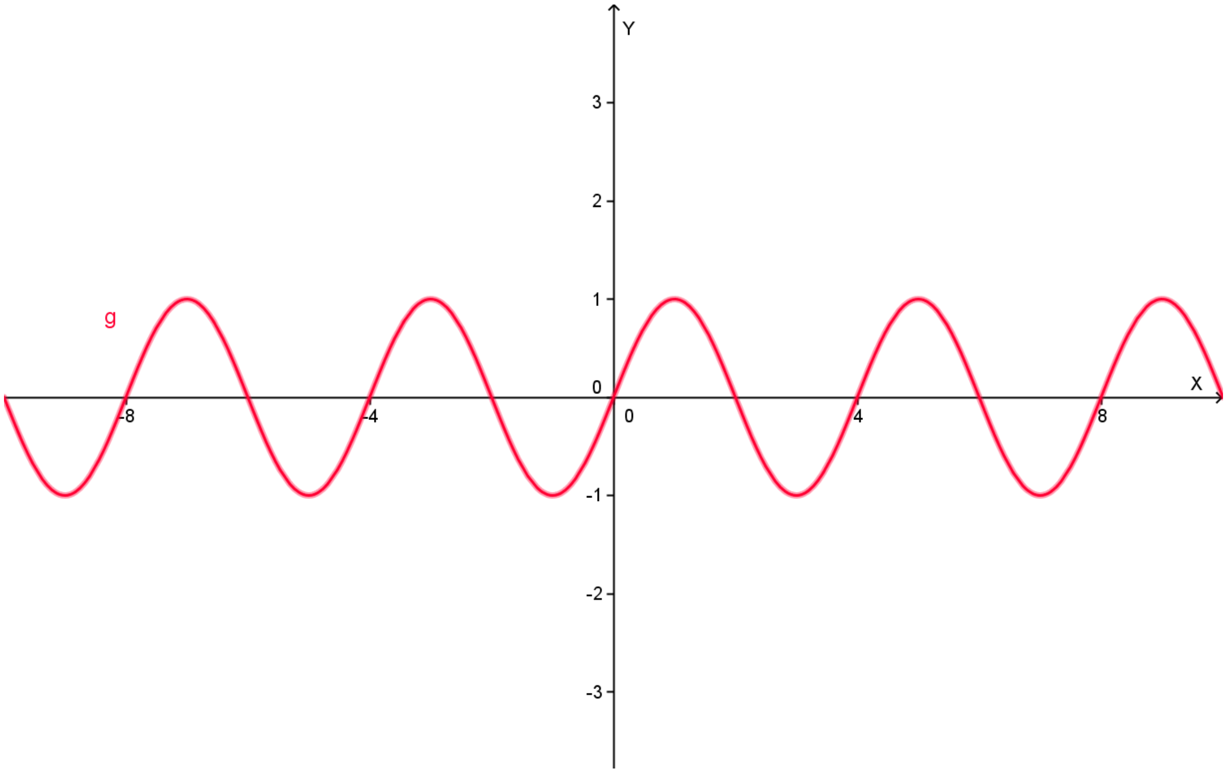
$f''(x) = 6x$, flesso nell'origine, concavità verso l'alto per x>0.

Il grafico è il seguente:



La seconda funzione, $g(x) = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, è una funzione sinusoidale di periodo $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$.

Il suo grafico è il seguente:



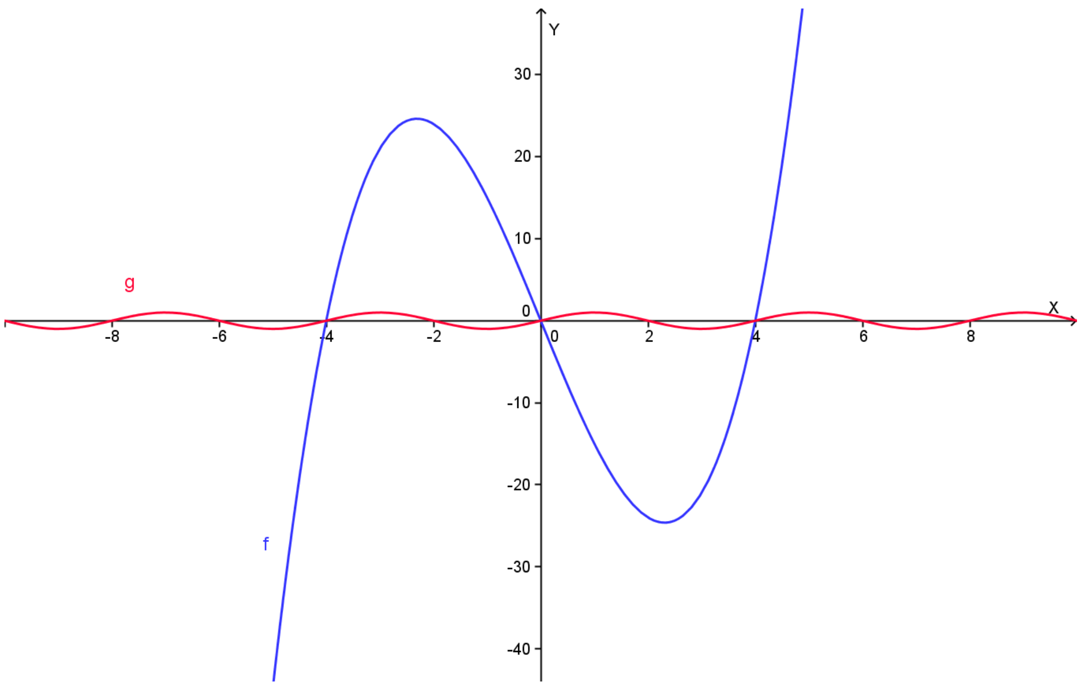
I punti del grafico di g a tangente orizzontale, nell'intervallo [-10;10] sono:

sono i punti per cui $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \pm 1$.

Quelli con ordinata uguale a 1 hanno ascisse x=-7, -3, 1, 5, 9.

Quelli con ordinata uguale a -1 hanno ascisse x=-9, -5, -1, 3, 7.

I due grafici, nello stesso sistema di riferimento, sono i seguenti:

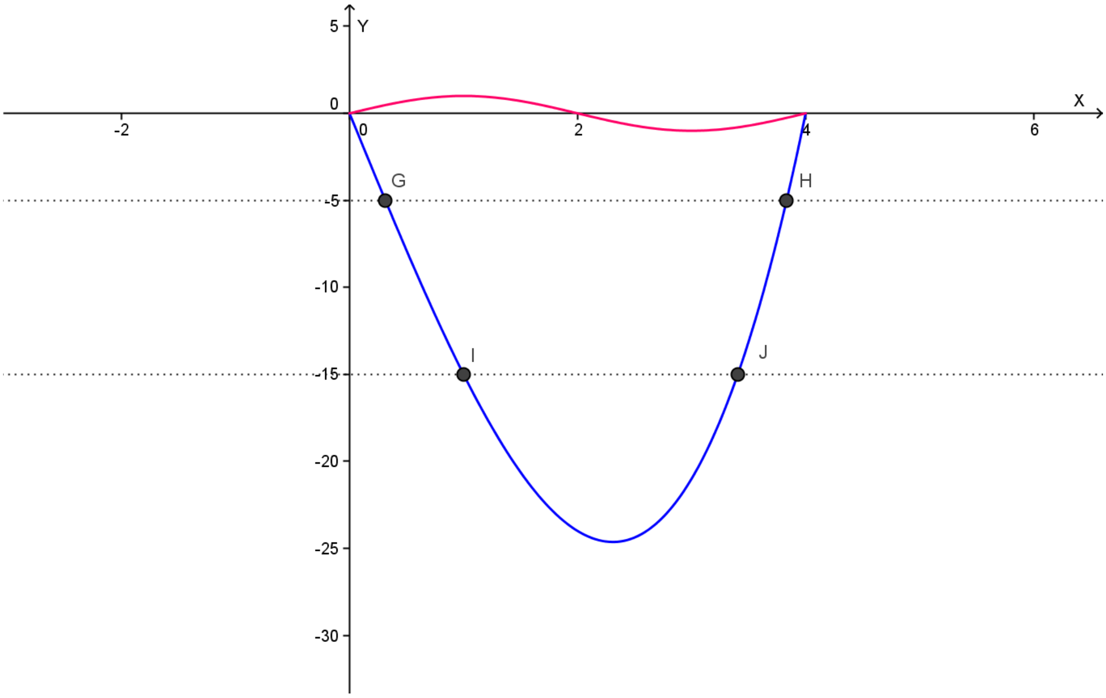


2)

L'area della regione R richiesta si ottiene calcolando l'integrale

$\int_0^4 (g(x)-f(x))dx$, oppure più semplicemente, come si osserva dalla figura:

$$-\int_0^4 (f(x))dx = -\int_0^4 (x^3-16x)dx = -\left[\frac{x^4}{4}-8x^2\right]_0^4 = 64$$



3)

Le intersezioni con la retta y=-15 si ottengono risolvendo il sistema:

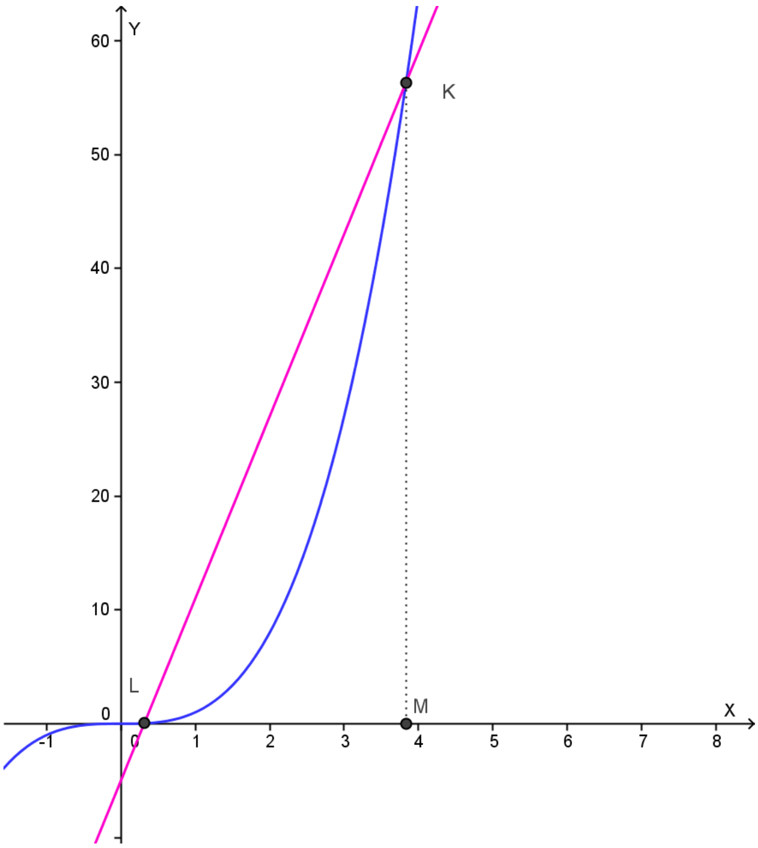
$\begin{cases} y = x^3-16x \\ y=-15 \end{cases}$, che conduce all'equazione: $x^3-16x+15=0$. Quest'ultima si abbassa di grado con x=1 mediante la regola di Ruffini: ($(x-1)(x^2+x-15)=0$. Le soluzioni sono:

x=1, $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{61}}{2}$ (corrispondenti a circa **3.4**, accettabile nell'intervallo dato e -4.4, non accettabile nell'intervallo dato).

I

Le intersezioni con la retta y=-5 si ottengono risolvendo il sistema:

$\begin{cases} y = x^3-16x \\ y=-15 \end{cases}$, che conduce all'equazione: $x^3-16x+5=0$. Le soluzioni di questa equazione possono essere localizzate per via grafica, confrontando le curve di equazione $y = x^3$ e $y = 16x - 5$.



Dal confronto grafico si scopre che le due soluzioni richieste sono negli intervalli [0;1] e [3;4].
Utilizzando il metodo di bisezione o delle tangenti si trovano i seguenti valori approssimati a meno di 1/10: **0.3 e 3.8.**

4)

Il volume richiesto si calcola mediante l'integrale definito: $\int_0^4 (g(x) - f(x))h(x)dx$, poiché può essere visto come somma di infiniti rettangoli di dimensioni (g(x)-f(x)) e h(x), somma estesa all'intervallo [0;4].
L'integrale da calcolare è il seguente:

$$\int_0^4 \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - (x^3 - 16x) \right)(5 - x)dx = \int_0^4 \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right)(5 - x)dx - \int_0^4 \left(-x^4 + 5x^3 + 16x^2 - 80x \right)dx =$$

$$\frac{8}{\pi} + \frac{2751}{15} \cong 186.013$$

(il primo integrale si calcola per parti …).

Supponendo le misure in metri, il volume della vasca è pari a

$$\frac{8}{\pi} + \frac{2751}{15} \cong 186.013\, m^3 = 186013\ dm^3 = 186013\ litri$$